III. FAKTÖR ANALİZİ

III.1 Giriş

Faktör Analizi (FA), bir veri matrisinin temelini oluşturan yapıyı tanımlamayı amaç edinen ve temel görevleri dışında birçok çok değişkenli istatistiksel analizin uygulanmasında önemli roller üstlenebilen bir çok değişkenli istatistiksel analiz tekniğidir.

FA genel anlamda aralarında ilişki bulunan p sayıdaki değişkemle açıklanan bir yapıyı, kendi içinde ilişkili; ancak aralarında ilişki bulunmayan daha az sayıdaki $(k < p)$ yeni değişkenle (faktör, ortak faktör) açıklamaya yarayan bir yöntemler topluluğudur. Faktör analizi sonucunda bulunan yeni değişkenler (faktörler) orijinal değişkenlerin doğrusal fonksiyonları olup birbirine diktir. Ancak, her faktörü oluşturan temel değişkenler arasındaki ilişkiler oldukça yüksektir.

FA yorumlanması güç, birbiri ile ilişkili çok sayıda değişkenden, en az bilgi kaybı ile bağımsız, kavramsal açıdan anlamlı az sayıda yeni değişkenler (faktörler) bulmayı, ortaya çıkarmayı amaçlayan çok değişkenli yöntemler bütünüdür.

Faktör analizi birbirleri ile ilişkili veri yapılarını birbirinden bağımsız daha az sayıda yeni veri yapılarına dönüştürmek, bir diğer deyişle bir oluşumun nedenini açıkladıkları varsayılan değişkenleri (faktörleri/boyutları) ortaya çıkarmak ve gerektiğinde adlandırmak aöacıyla başvurulan bir yöntemler topluluğudur.

Özet olarak faktör analizinin temel iki amacı boyut indirgemek (yani değişken sayısını azaltmak) ve değişkenler arasındaki ilişkilerdeki yapıyı araştırmak, diğer bir deyişle değişkenleri sınıflamaktır. Faktör analizinde ele alınan değişkenler arasında, bağımlı ve bağımsız değişkenler olarak adlandırılacak bir yapı yoktur. Değişkenlerin hepsi eşanlı olarak bir yapıyı oluşturan birbiri ile ilişkili değişkenlerdir. Faktör analizi bu yönü ile çok değişkenli varyans analizi, çoklu regresyon analizi, diskriminant analizi, kanonik korelasyon analizi gibi bir yada birden çok bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını inceleyen yöntemlerden ayrılır.

$\underline{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \dots & X_p \end{bmatrix}$ değişkenler vektörü (orijinal/başlangıç sistemi) verilsin. Bu değişkenlerden bazıları kendi aralarında yüksek ilişkiye (korelasyona) sahipken, diğer tüm değişkenlerle daha düşük ilişki içerisinde olabilir. Birbirleri ile yüksek ilişki içerisinde olan değişkenleri gruplandırarak yeni değişkenler türetebiliriz. Bu yeni değişkenlere faktör yada ortak faktör adı verilir. Bu yönü ile faktör analizi, değişkenleri gruplandırarak, başlangıç sistemini daha az sayıdaki yeni değişkenlerle temsil etmeyi veya açıklamayı amaçlayan bir çok değişkenli analiz tekniğidir.

Faktör analizinde $X_1,\ X_2, \dots\ ,X_p$ değişkenlerini, faktör adı verilen daha az sayıdaki $f_1, f_2, \dots, f_m\ \ (m \leq p)$ rastgele değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olarak ifade ederiz. Buna göre faktörler, X_j'lerden türetilen latent değişkenlerdir. X_j değişkenleri gibi birimden birime değişirler fakat değişkenlerin aksine, faktörler ölçülememekte ve gözlenememektedir.

X_j $(j = 1, 2, \dots, p)$ değişkenleri en azından orta düzeyde ilişkili ise sistemin esas boyut yapısı p'den daha küçüktür. Faktör analizinde amaç, daha az sayıda faktörleri kullanarak değişkenler arasındaki fazlalığı gidermek, yani boyut indirgemektir.

Başlangıç sistemine ait değişkenlerin korelasyon matrisinde belirli bir alt kümedeki değişkenler kendi aralarında yüksek korelasyonlara, fakat diğer tüm değişkenlerle düşük korelasyonlara sahip olacak şekilde yüksek ve düşük korelasyonların olduğunu kabul edelim. Bu takdirde alt kümedeki değişkenlerin ortaya çıkardığı tek faktör olabilir. Eğer; diğer değişkenler korelasyon matrisindeki korelasyonların benzer yapısı ile değişkenleri benzer şekilde alt kümelere gruplandırılırsa, o zaman birkaç faktör bu değişken gruplarını ifade edebilir. Bu durumda korelasyon matrisindeki örüntü, direkt olarak faktörlere karşılık gelir. Örneğin; $p = 5$ için korelasyon matrisi şu şekilde olsun.

$$R = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,90 & 0,05 & 0,05 & 0,05 \\ 0,90 & 1,00 & 0,05 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 1,00 & 0,90 & 0,90 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 & 1.00 & 0,90 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 & 0,90 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Korelasyon matrisine göre birinci ve ikinci değişken bir faktöre karşılık gelirken, üçüncü, dördüncü ve beşinci değişkenlerde bir diğer faktöre karşılık gelecektir. Korelasyon matrisinin böyle basit bir örüntüye sahip olmadığı bazı durumlarda, faktör analizi değişkenleri kümelere ayıracaktır.

Faktör analizi TBA ile ilgilidir. Gerçekte her ikisi de değişkenlerin bir kümesinde basit bir yapı bulmaya çalışır, fakat birçok yönden de farklıdırlar. Örneğin en önemli iki farklılık şu şekildedir:

i) TB'ler başlangıç sistemine ait değişkenlerin $(X_t,\ t = 1,\ 2, \dots, p)$ veya standart değişkenlerin $(Z_t,\ t = 1,\ 2, \dots, p)$ doğrusal fonksiyonları olarak tanımlanır. Faktör analizinde ise başlangıç sistemine ait değişkenler veya standart değişkenler faktörlerin doğrusal fonksiyonları olarak ifade edilir.

ii) TBA'de değişkenlerin toplam varyansının büyük bir kısmı açıklanmaya çalışılırken, faktör analizinde değişkenler arasındaki kovaryans ya da korelasyonlar açıklanmaya çalışılır.

Bu açıklamaların ışığı altında faktör analizinin iki temel amacını şu şekilde verebiliriz:

i) p-değişkenli bir olayda (p boyutlu bir sistem) birbiri ile ilişkili değişkenleri birbirinden bağımsız ve daha az sayıda yeni değişkenlere (ortak faktör, hipotetik değişken) dönüştürmektir.

ii) Bir oluşumu veya bir nedeni açıkladıkları kabul edilen değişkenleri gruplandırarak ortak faktörleri ortaya çıkarmak ve onları adlandırmak.

Faktör analizi TBA'nin bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Bu yüzden faktör analizinde analiz işlemleri doğrudan orijinal veri matrisinden değil, bu matristen elde edilen kovaryans matrisi veya korelasyon matrisi üzerinden yapılmaktadır.

III.2 Ortogonal (Dik) Faktör Modeli

III.2.1 Model Tanımı ve Varsayımlar

$\underline{X}' = [X_1 \;\; X_2 \ldots \;\; X_p]$ değişkenler vektörü (orijinal/başlangıç sistemi) verilsin. Bu sistem için ortalama vektörü $E(\underline{X}) = \underline{\mu}: p \times 1$ ve kovaryans matrisi $Cov(\underline{X}) = \Sigma: p \times p$ olsun. Bu sisteme ait standart değişkenler sistemini ise $\underline{Z}' = [Z_1 \;\; Z_2 \ldots \;\; Z_p]$ standart değişkenler vektörü ile gösterelim Standart değişken sistemi için ortalama vektör ve kovaryans matrisi sırası ile $E(\underline{Z}) = \underline{0}: p \times 1$ ve $Cov(\underline{Z}) = Kor(\underline{X}) = \mathrm{R}: p \times p$ dir. Faktör analizi modeli her bir değişkeni $(X_j \; veya \; Z_j \; , j = 1, 2, \ldots, p)$, $f_1, f_2, \ldots, f_m$, $(m < p)$ ortak faktörleri ile ilgili değişkene karşılık gelen hata teriminin (örneğin $X_j \; veya \; Z_j$ için ε_j) bir doğrusal fonksiyonu olarak ifade eder. Buna göre faktör analizi modelinin başlangıç sistemine ait değişkenler cinsinden ifadesi;

$$\begin{aligned} X_1 - \mu_1 &= l_{11} f_1 + l_{12} f_2 + \cdots + l_{1m} f_m + \varepsilon_1 \\ X_2 - \mu_2 &= l_{21} f_1 + l_{22} f_2 + \cdots + l_{2m} f_m + \varepsilon_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ X_p - \mu_p &= l_{p1} f_1 + l_{p2} f_2 + \cdots + l_{pm} f_m + \varepsilon_p \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde iken, standart sisteme ait değişkenler cinsinden ifadesi ise;

$$\begin{aligned} Z_1 &= l_{11} f_1 + l_{12} f_2 + \cdots + l_{1m} f_m + \varepsilon_1 \\ Z_2 &= l_{21} f_1 + l_{22} f_2 + \cdots + l_{2m} f_m + \varepsilon_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ Z_p &= l_{p1} f_1 + l_{p2} f_2 + \cdots + l_{pm} f_m + \varepsilon_p \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.1) ve (3.2) ile verilen modellerin matris notasyonu ile ifadesi sırası ile

$$\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon} \tag{3.3}$$

ve

$$\underline{Z} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon} \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Burada $L: p \times m, \underline{F}: m \times 1$ ve $\underline{\varepsilon} : p \times 1$ dir. Ayrıca:

l_{jk}: k-ncı faktör üzerinde j-nci değişkenin faktör yükü $(k = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, p)$

f_k : k-ncı ortak faktör $(k = 1, 2, \ldots, m)$

ε_j : j-nci değişkene karşılık gelen özel faktör veya hata terimi $(j = 1, 2, \ldots, p)$

$L = [l_{jk}] : p \times m$ faktör yükleri matrisi

$\underline{F} = [f_k]: m \times 1$ ortak faktörler vektörü

$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_j] : p \times 1$ özel faktörler veya hata vektörü

anlamında kullanılmaktadır. Faktör analizi modelinde $X_j\ veya\ Z_j$, $(j = 1, 2, \ldots , p)$ değişkenleri ölçülebilir değişkenlerken, f_k, $(k = 1, 2, \ldots , m)$ ortak faktörleri ölçülemeyen (gözlenemeyen) rastgele değişkenlerdir. Bu sebeple ortak faktörlere hipotetik ve latent değişken de denir.

Tanım 3.1 Eşitlik (3.1) ya da (3.3) veya Eşitlik (3.2) ya da (3.4) ile verilen faktör analizi modeli için;

i) $E(\underline{F}) = \underline{0} : m \times 1$ ii) $Cov(\underline{F}) = E(\underline{F}\ \underline{F}') = I_m$

iii) $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0} : p \times 1$ iv) $Cov(\underline{\varepsilon}) = E(\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') = \Psi = Kös[\psi_1 ,\ \psi_2 , \ldots ,\ \psi_p] : p \times p$

iv) $Cov(\underline{F} ,\ \underline{\varepsilon}) = E(\underline{F}\ \underline{\varepsilon}') = \underline{0} : m \times p$

varsayımları sağlanıyorsa, bu faktör analizi modeline Ortogonal Faktör Modeli denir.

Bu tanım dikkate alındığında bir ortogonal faktör modelinde; birinci varsayıma göre $k = 1, 2, \ldots , m$ için $E(f_k) = 0$ ve $i \neq k = 1, 2, \ldots , m$ için $Cov(f_k , f_i) = 0$ ve $Var(f_k) = 1$ demektir. Yani ortak faktörler sıfır ortalamalı, birim varyanslı ve birbirleri ile ilşkisiz ölçülemeyen rastgele değişkenlerdir. İkinci varsayıma göre; $j = 1, 2, \ldots , p$ için $E(\varepsilon_j) = 0$, $Var(\varepsilon_j) = \psi_j$ ve $i \neq j = 1, 2, \ldots , p$ için $Cov(\varepsilon_j , \varepsilon_i) = 0$ demektir. Bu ise hata terimlerinin sıfır ortalamalı, farklı varyanslara sahip ilişkisiz rastgele değişkenler olduğu anlamına gelir. Üçüncü varsayıma göre $k = 1, 2, \ldots , m; j = 1, 2, \ldots , p$ için $Cov(f_k , \varepsilon_j) = 0$ olup, ortak faktörler ile özel faktörlerin / hata terimlerinin ilişkisiz olması demektir.

Sonuç:1 Eşitlik (3.3) ile verilen m-ortak faktörlü bir ortogonal faktör modeli;

i) $\underline{X}$ değişkenler vektörüne ait varyans kovaryans yapısını

$$\Sigma = LL' + \Psi \tag{3.5}$$

şeklinde açıklar. Bu yapıya Σ matrisinin faktörleşme yapısı denir.

ii) Başlangıç değişkenleri ile ortak faktörler ilişkilidir ve $Cov(\underline{X} , \underline{F}) = L$ dir.

İspat $\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ bir ortogonal faktör modeli olsun. Bu durumda Tanım:1 deki varsayımlar sağlanıyor demektir.

i) $\Sigma = \mathrm{Cov}(\underline{X}) = \mathrm{Cov}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) = E\left[\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)'\right] = E\left[(L\underline{F} + \underline{\varepsilon})(L\underline{F} + \underline{\varepsilon})'\right]$

$= E[(L\underline{F} + \underline{\varepsilon})(\underline{F}'L' + \underline{\varepsilon}')] = E(L\underline{F}\ \underline{F}'L' + L\underline{F}\ \underline{\varepsilon}' + \underline{\varepsilon}\ \underline{F}'L' + \underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') = E(L\underline{F}\ \underline{F}'L') +$

$E(L\underline{F}\ \underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\ \underline{F}'L') + E[\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}'] = LE(\underline{F}\ \underline{F}')L' + LE(\underline{F}\ \underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\ \underline{F}')L' + E[\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}'] = LI_mL +$

$L[0] + [0]L' + \Psi \Rightarrow$

$\Sigma = LL' + \Psi$

elde edilir.

ii) $Cov(\underline{X}, \underline{F}) = Cov\left(\underline{X} - \underline{\mu}, \underline{F}\right) = E\left[\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\underline{F}'\right] - E\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)E(\underline{F}') =$

$E\left[\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\underline{F}'\right] = E\left(\left(L\underline{F} + \underline{\varepsilon}\right)\underline{F}'\right) = E\left(L\underline{F}\,\underline{F}'\right) + E\left(\underline{\varepsilon}\,\underline{F}'\right) = LE\left(\underline{F}\,\underline{F}'\right) + [0] = LI_m = L$

bulunur.

Sonuç:2 Σ matrisinin Sonuç:1'de verilen faktörleşme yapısına göre, Σ matrisine ait p tane varyans ve $\frac{p(p-1)}{2}$ tane kovaryans ($p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$ tane eleman) $p \times m$ tane faktör yükü (l_{jk}) ve p tane özel faktör varyansı (ψ_j) (toplam $p \times (m+1)$ tane eleman) ile açıklanabilmektedir. Öyle ki;

$$Var(X_j) = \sigma_{jj} = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 + \psi_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, p \qquad (3.6)$$

$$Cov(X_j, X_t) = \sigma_{jt} = l_{j1}l_{t1} + l_{j2}l_{t2} + \cdots + l_{jm}l_{tm} \quad j \neq t = 1, 2, \ldots, p \qquad (3.7)$$

yazılabilir.

ii) Başlangıç değişkenleri ile ortak faktörler ilişkili olup;

$$Cov(X_j, f_k) = l_{jk}\,,,\ j = 1, 2, \ldots, p; k = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.8)$$

olarak elde edilir. Bu ise X_j değişkeni ile f_k faktörü arasındaki ilişki l_{jk} faktör yükü demektir. Eşitlik (3.6) faktör analizi sonuçlarını değerlendirmemizde önemli rol oynar. Bu eşitliğe göre her bir X_j değişkenine ait varyans, ortak faktörler tarafından açıklanabilen varyans ve açıklanamayan varyans olarak iki kısma ayrılmaktadır. Her bir X_j değişkenine ait varyansın ortak faktörler tarafından açıklanabilen kısmına X_j değişkeninin komünalitesi denir ve h_j^2 ile gösterilir. Bu durumda X_j değişkenine ait komünalite;

$$h_j^2 = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2\,, j = 1, 2, \ldots, p \qquad (3.9)$$

şeklinde gösterilir. ψ_j ise X_j değişkenine ait varyansın ortak faktörler tarafından açıklanamayan kısmı olup, özel faktör varyansı/hata varyansı olarak adlandırılır. Böylece Eşitlik (3.6) daha kısa bir gösterimle;

$$Var(X_j) = \quad h_j^2 + \psi_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, p \qquad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç:2'ye göre; eğer $m < p$ ise $p \times (m+1) < \frac{p(p+1)}{2}$ dir. Gerçekten $p = 12$ ve $m = 2$ iken $\frac{p(p+1)}{2} = \frac{12 \times 13}{2} = 78$ farklı eleman, ortogonal faktör modeline göre $p \times (m+1) = 12 \times 3 = 36$ elemanla açıklanabilecektir.

Eğer $m = p$ ise bu durumda Σ matrisi ortak faktörlere ait faktör yükleri ile tamamen açıklanabileceğinden $\Sigma = LL'$ yazılabilir. Bu takdirde $\Psi = [0]$ olur. Ancak böyle bir durum verilen bir sistemde boyut indirgemeyi gerçekleştirmediğinden uygulamalarda genellikle tercih edilmez.

Diğer taraftan ortak faktör sayısının (m) çok küçük olması durumunda her ne kadar $\underline{X}$ vektörüne ait kovaryans yapısının açıklanması için $\Sigma = LL' + \Psi$ denklemi nümerik çözümler verse de bu çözümler istatistiksel olarak anlamlı olmayabilir.

<u>Örnek:1</u> $\underline{X}' = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]$ değişkenler vektörü için kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,9 & 0,7 \\ 0,9 & 1,0 & 0,4 \\ 0,7 & 0,4 & 1,0 \end{bmatrix}$ olsun. Ortak faktör sayısı $m = 1$ iken $\underline{X}$ değişkenler vektörünün kovaryans yapısının açıklanmasının anlamlı olup olmadığını gösteriniz?

<u>Çözüm</u> $m = 1$ durumunda ortogonal faktör modeli $\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $\underline{F} = [f_1]$, $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ olup, bunlar model denkleminde yerlerine yazılırsa:,

$X_1 - \mu_1 = l_{11}f_1 + \varepsilon_1$
$X_2 - \mu_2 = l_{21}f_1 + \varepsilon_2$

$X_1 - \mu_1 = l_{31}f_1 + \varepsilon_3$ olup, $\underline{X}$'nün kovaryans yapısının açıklanması;

$$\Sigma = LL' + \Psi \Rightarrow \begin{bmatrix} 1,0 & 0,9 & 0,7 \\ 0,9 & 1,0 & 0,4 \\ 0,7 & 0,4 & 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ \dots & l_{21}^2 & l_{21}l_{31} \\ \dots & \dots\dots & l_{31}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & & \\ & \psi_2 & \\ & & \psi_3 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Buradan elde edilecek olan denklemler;

$1,0 = l_{11}^2 + \psi_1$ $\qquad$ $0,9 = l_{11}l_{21}$ $\qquad$ $0,7 = l_{11}l_{31}$

$1,0 = l_{21}^2 + \psi_2$ $\qquad$ $0,4 = l_{21}l_{31}$ $\qquad$ $\Rightarrow \frac{l_{11}}{l_{21}} = \frac{0,7}{0,4} \Rightarrow l_{21} = \frac{0,4}{0,7} l_{11}$ olur.

$1,0 = l_{31}^2 + \psi_3$

$0,9 = l_{11}l_{21} = l_{11} \times \frac{0,4}{007} l_{11} = \frac{0,4}{0,7}\ l_{11}^2 \ \Rightarrow\ l_{11}^2 = \frac{0,9\times 0,7}{0,4} = 1,575 \Rightarrow\ l_{11} = \pm 1,255$ bulunur

$Var(X_1) = 1$ ve ortogonal faktör modelinin varsayımları gereğince $Cov(\underline{F}) = I$ olacağından $Var\ (f_1) = 1$'dir. Ayrıca $Cov(\underline{X}\,,\underline{F}\,) = Cor\ (\underline{X}\,,\underline{F}\,) = L$ olup, $Corr(X_1, f_1\,) = l_{11} = \pm 1,255$ elde edilir ki, bu sonuç istatistiksel olarak anlamsızdır. Çünkü iki değişken arasındaki korelasyon -1'den küçük ve +1'den de büyük olamaz.

Diğer taraftan; $\sigma_{jj} = h_j^2 + \psi_j$ olup, $j = 1$için $\sigma_{11} = h_1^2 + \psi_1 \ \Rightarrow 1 = l_{11}^2 + \psi_1 \ \Rightarrow 1 = 1,575 + \psi_1$ $\Rightarrow \psi_1 = -0,575 < 0$ bulunur. Burada ψ_1, X_1 değişkenine karşılık gelen özel faktör varyansı olduğundan böyle bir sonuç yine istatistiksel olarak anlamsızdır.

Sonuç olarak ortak faktör sayısı çok küçük olduğunda her ne kadar kovaryans yapısının açıklanması ile denklemin nümerik çözümleri bulanabiliyor olsa da bu çözümler istatistiksel olarak bir anlam ifade etmezler.

Sonuç:3 Eşitlik (3.4) ile verilen m-ortak faktörlü bir ortogonal faktör modeli;

i) $\underline{Z}$ değişkenler vektörüne ait varyans kovaryans yapısını

$$\mathrm{R} = LL' + \Psi \tag{3.11}$$

şeklinde açıklar. Bu yapıya R matrisinin faktörleşme yapısı denir.

Eşitlik (3.11)'e göre;

$$Var(Z_j) = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 + \psi_j\ ,\ j = 1, 2, \dots, p \tag{3.12}$$

olup, burada $h_j^2 = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2$ olduğu dikkate alınırsa;

$$1 = h_j^2 + \psi_j\ ,\ j = 1, 2, \dots, p \tag{3.13}$$

yazılabilir. Ayrıca;

$$Cov(Z_j, Z_t) = r_{jt} = l_{j1}l_{t1} + l_{j2}l_{t2} + \cdots + l_{jm}l_{tm} \quad j \neq t = 1, 2, \dots, p \tag{3.14}$$

olur.

ii) Standart değişkenler ile ortak faktörler ilişkilidir ve $Cov(\underline{Z}\,, \underline{F}) = Kor(\underline{Z}\,, \underline{F}) = L$ olacağından böylece;

$$Cov(Z_j, f_k) = Kor(Z_j, f_k) = l_{jk},,\ j = 1, 2, \dots, p\ ;\mathrm{k} = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \tag{3.15}$$

yazılabilir.